24/10/2016

Ασκήσεις από το 1ο Φυλλάδιο

Ασκηση 9.

$A \subseteq \mathbb{R}$ ώστε $\sup A - \inf A = 2$

Να δ.ο. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x, y \in A$ με $x - y > 2 - \varepsilon$

Αποδ

Έστω $\varepsilon > 0$

Απο το χαρακτηρισμό του supremum υπάρχει

$x \in A$ με $x > \sup A - \frac{\varepsilon}{2}$ (1)

Απο το χαρακτηρισμό του infimum υπάρχει

$y \in A$ με $y < \inf A + \frac{\varepsilon}{2}$

$\Rightarrow -y > -\inf A - \frac{\varepsilon}{2}$ (2)

(1), (2) $\Rightarrow x - y > \sup A - \inf A - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2}$

$\Rightarrow x - y > 2 - \varepsilon.$

Ορισμός Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ και $f : A \to \mathbb{R}$.

Ένας αριθμός $a > 0$ λέγεται περίοδος της f

αν (i) $\forall x \in \mathbb{R} \quad x \in A \Leftrightarrow x + a \in A$

(ii) $\forall x \in A \quad f(x+a) = f(x)$

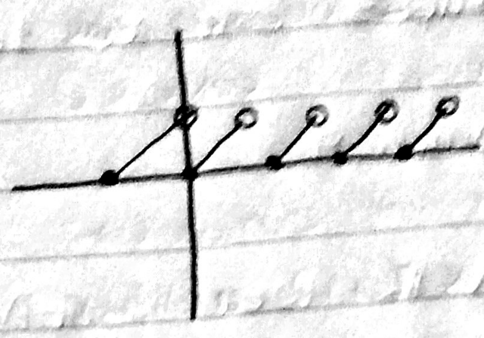
Η f λέγεται περιοδική αν έχει ως περίοδο κάποιο $a > 0$

Παράδειγμα

α) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = x - [x]$

Ισχύει $f(x+1) = f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$



β) f $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

$\forall q \in \mathbb{Q}$ με $q > 0$ είναι περίοδος της συνάρτησης f.

Ορισμός Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ και f $A \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση

Η f λέγεται άρτια αν

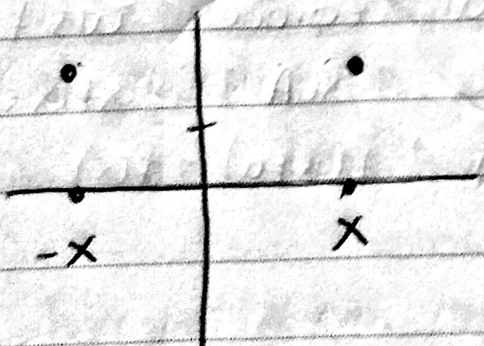
(i) $\forall x \in \mathbb{R}$ $x \in A \Rightarrow -x \in A$

(ii) $\forall x \in A$ $f(-x) = f(x)$

Η f λέγεται περιττή αν

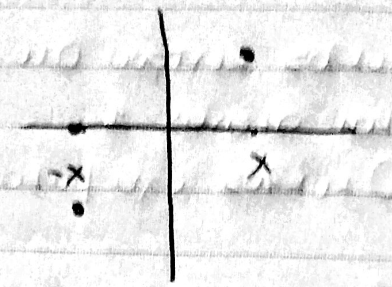
(i) $\forall x \in \mathbb{R}$ $x \in A \Rightarrow -x \in A$

(ii) $\forall x \in A$ $f(-x) = -f(x)$



Παρατήρηση

α) Όταν η f είναι άρτια ο άξονας $y'y$ είναι άξονας συμμετρίας της γραφικής παράστασης της f.



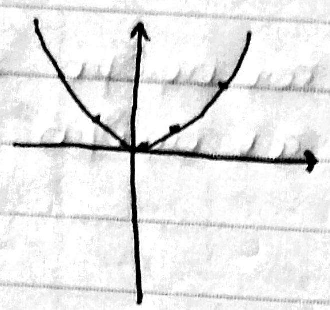
Παρατήρηση

β) Όταν η f είναι περιττή η αρχή των αξόνων είναι κέντρο συμμετρίας της γραφικής παράστασης της f

Παραδείγματα

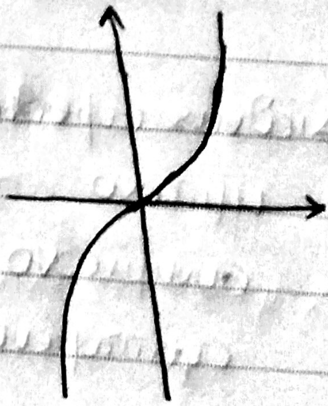
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = x^{\nu}$ (όπου $\nu \in \mathbb{N}$)

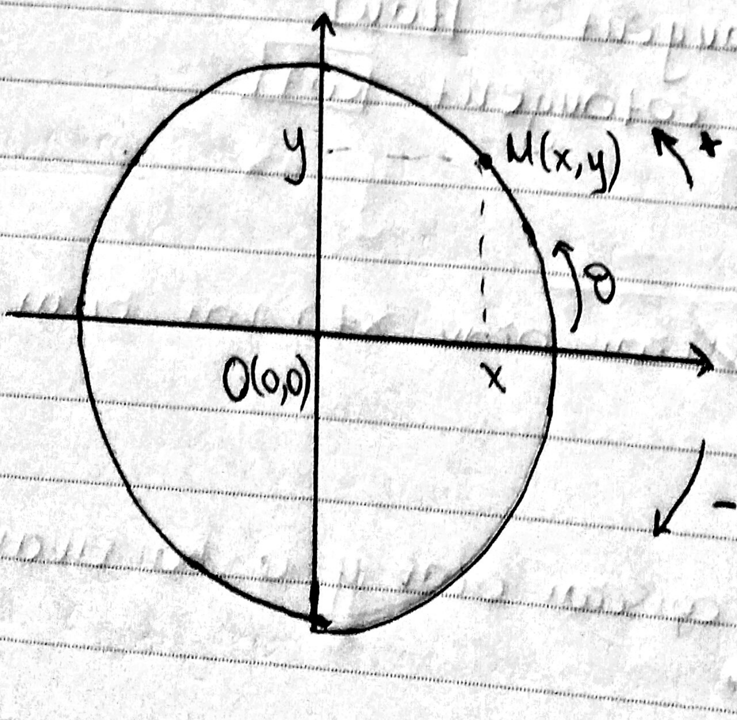
Για ν άρτιο η f είναι άρτια



$f(x) = x^2$

Για ν περιττό η f είναι περιττή





Κύκλος κέντρου $O(0,0)$
και ακτίνας 1.
Ο κύκλος έχει μήκος 2π

Σχήμα προηγούμενη
σελίδα.

Ξεκινώντας από το
σημείο $(1,0)$ κινούμαστε
κατά μήκος του κύκλου
Αν το τόξο μήκους θ
έχει ως ένα άκρο το
$O(0,0)$ και δεύτερο
άκρο το (x,y)

<u>Ορίζουμε</u> ημίτονο του τόξου θ τον αριθμό $\sin\theta = y$
συνημίτονο του τόξου θ τον αριθμό $\cos\theta = x$

Διεθνής συμβολισμός για τους τριγωνομετρικούς αριθμούς
- ημίτονο ~ sinus $\boxed{\sin}$
- συνημίτονο ~ cosinus $\boxed{\cos}$
- εφαπτομένη ~ tangent $\boxed{\tan}$
- συνεφαπτομένη ~ cotangent $\boxed{\cot}$

Εφαπτομένη του θ ορίζεται όταν $x \neq 0$ και είναι
$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$

Συνεφαπτομένη του θ ορίζεται όταν $y \neq 0$ και είναι
$$\cot\theta = \frac{x}{y}$$

Έχουμε $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ όταν $\cos\theta \neq 0$

$$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \quad \text{όταν } \sin\theta \neq 0$$

$\sin\theta = 0 \iff \theta = k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

$\cos\theta = 0 \iff \theta = k\pi + \frac{\pi}{2} \quad k \in \mathbb{Z}$

Το 2π είναι περίοδος των τριγωνομετρικών συναρτήσεων.

θ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin\theta$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos\theta$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
$\tan\theta$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	$-$
$\cot\theta$	$-$	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}/3$	0

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\cos(\pi/2 - \theta) = \sin\theta$

$\sin(\pi/2 - \theta) = \cos\theta$

$\tan(\pi/2 - \theta) = \cot\theta$

$\cot(\pi/2 - \theta) = \tan\theta$.

Τριγ αριθμοί της $-\theta$

$\cos(-\theta) = \cos\theta$

$\sin(-\theta) = -\sin\theta$

$\tan(-\theta) = -\tan\theta$

$\cot(-\theta) = -\cot(\theta)$

Τριγ. αριθμοί του $\pi-\theta$..

$\cos(\pi-\theta) = -\cos\theta$
$\sin(\pi-\theta) = \sin\theta$
$\tan(\pi-\theta) = -\tan\theta$
$\cot(\pi-\theta) = -\cot\theta$.

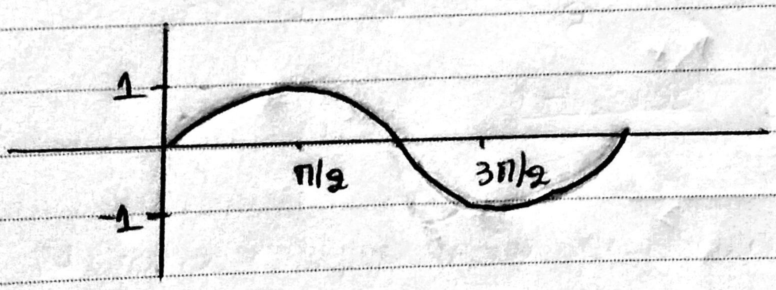
Τριγ. αριθμοί $\pi+\theta$

$\cos(\pi+\theta) = -\cos\theta$
$\sin(\pi+\theta) = -\sin\theta$
$\tan(\pi+\theta) = \tan\theta$
$\cot(\pi+\theta) = \cot\theta$.

<u>Παρατήρηση</u>

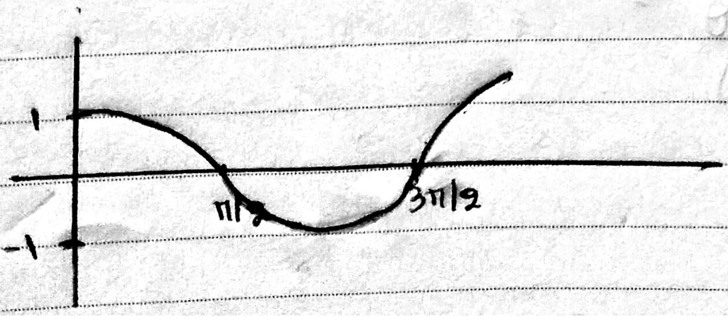
Οι tan, cot έχουν περίοδο π

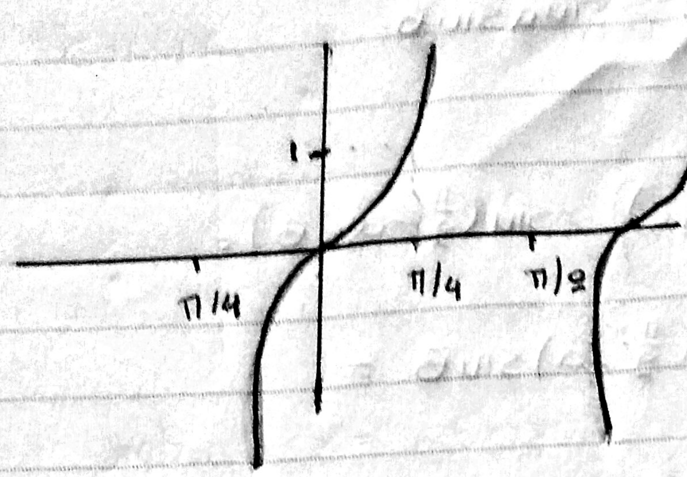
Γραφικές παραστάσεις των τριγωνομετρικών συναρτήσεων



$y=\sin x$

$y=\cos x$





Σημαντική ανισότητα

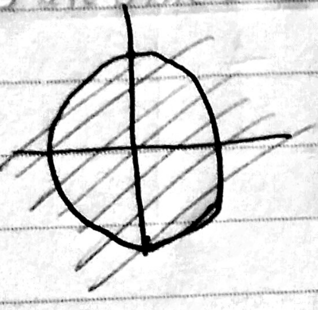
$\forall a$ με $|a| < \frac{\pi}{2}$

$|\sin a| \leq |a| \leq |\tan a|$

ισότητα ισχύει μόνο για $a=0$

Για $0 < a < \frac{\pi}{2}$

$\sin a < a < \tan a$



• Τριγωνομετρικοί αριθμοί αθροισμάτων και διαφορών

(1) $\sin(a+\beta) = \sin a \cos\beta + \cos a \sin\beta$

(2) $\sin(a-\beta) = \sin a \cos\beta - \cos a \sin\beta$

Αποδ (2)

$\sin(a-\beta) = \sin(a+(-\beta)) = \sin a \cos(-\beta) + \cos a \sin(-\beta)$

$= \sin a \cos\beta - \cos a \sin\beta$

(3) $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

<u>Αποδ.</u> (3)

$\cos(a+b) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - (a+b)\right) = \sin\left(\left(\frac{\pi}{2} - a\right) - b\right) =$

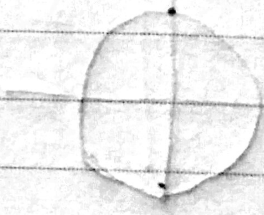
$= \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\cos b - \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\sin b =$

$= \cos a \cos b - \sin a \sin b$

(4) $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

<u>Αποδ</u> (4).

$\cos(a-b) = \cos(a+(-b)) \overset{(3)}{=} \cos a \cos(-b) - \sin a \sin(-b)$
$= \cos a \cos b + \sin a \sin b$



Τριγ. αρ διπλασίου τόξου

$\sin(2a) = 2\sin a \cos a$

$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 1 - 2\sin^2 a = 2\cos^2 a - 1$

$\Rightarrow \sin^2 a = \frac{1 - \cos(2a)}{2}$

$\cos^2 a = \frac{1 + \cos(2a)}{2}$

Μετατροπές γινομένων σε αθροίσματα

Προσθέτοντας τις (1),(2) κατά μέλη

(5) $2\sin a \cos b = \sin(a+b) + \sin(a-b)$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (3),(4)

(6) $$2\cos a \cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b)$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις (4),(3)

(7) $$2\sin a \sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b)$$